Binær regning

Addition

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \ og\ 1\ i\ mente$$

Eksempel

1011 adderes til 1001:

$$1011 + 1001 = 10100$$

Subtraktion

Regneregler for subtraktion:

$$0 - 0 = 0$$

$$0 - 1 = 1 \ og\ lånt\ 1$$

$$1 - 0 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

Eksempel

Fra 110111 subtraheres 11010:

$$\begin{array}{r} 110111 \\ \underline{-11010} \\ 11101 \end{array}$$

Multiplikation

Regneregler for multiplikation:

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

Eksempel

1011 multipliceres med 1001:

$$
\begin{array}{r}
\underline{1011 \cdot 1001} \\
1011 \\
0000 \\
0000 \\
\underline{1011} \\
1100011
\end{array}
$$

Boole algebra

Regnereglerne for logisk algebra eller "Boole´sk" algebra, udarbejdet af den engelske matematiker George Boole i midten af sidste århundrede.

Reglerne er på mange måder de samme som i den almindelige algebra, men alle den almindelige algebras regneoperationer kan ikke udføres på funktioner i logisk algebra.

Den logiske algebra forudsætter, at alle forekommende størrelser enten er et 1 eller 0, svarende til fx en sluttet kontakt (1) eller en afbrudt kontakt (0). I stedet for kontakter kan der også være tale om et højt eller lavt spændingsniveau.

Tegn

Normalt anvendes tegnet • for at symbolisere en OG-funktion (AND) og tegnet + en ELLER-funktion (OR).

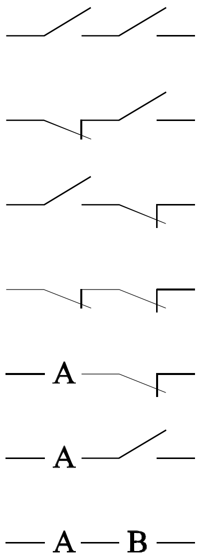
Undertiden forekommer andre matematiske tegn for OG og ELLER end som ovenfor anført, fx:

$\wedge$ = OG

$\vee$ = ELLER

Serieforbindelser "OG"

Ved serieforbindelser af to kontakter kan opstilles følgende regneregler:



$0 \cdot 0 =$ *læses: nul og nul er lig med nul*

$1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 1 = 1$

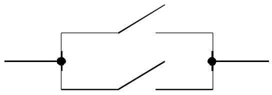
$A \cdot 1 = A$

$A \cdot 0 = 0$

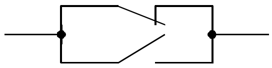
$A \cdot B = B \cdot A,$

såfremt A *og* $B = 1$ *bliver* $A \cdot B = 1$

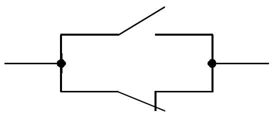
Parallelforbindelse "ELLER" Ved parallelforbindelse af to eller flere kontakter kan opstilles følgende regneregler:



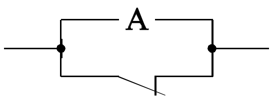
$0 + 0 = 0$ *læses: nul eller 0 er lig med nul*



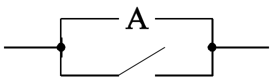
$1 + 0 = 1$



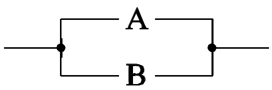
$0 + 1 = 1$



$A + 1 = 1$



$A + 0 = A$



$A + B = B + A$,

såfremt A *eller* B *er* 1, *bliver* $A + B = 1$

Invertfunktion "IKKE" Når indgangssignalet er 1, er udgangssignalet modsat, og omvendt, når indgangssignalet er 0, er udgangssignalet 1.

Følgende regneregler opstilles:

$\overline{0} = 1$ *læses: ikke nul er lig med en*

$\overline{1} = 0$ *læses: ikke en er lig med nul*

$\overline{\overline{0}} = 0$ *læses: ikke nul er lig med nul*

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{0 + B} = 1 \cdot \overline{B} = \overline{B}$$

$$\overline{1 \cdot B} = 0 + \overline{B} = \overline{B}$$

$$\overline{0 \cdot B} = 1 + \overline{B} = 1$$

$$\overline{1 + B} = 0 \cdot \overline{B} = 0$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

$$A + \overline{A} = 1$$

Beviser

Vi skal ikke her komme ind på bevisførelsen for alle regnereglerne, men nøjes med de to vanskeligste beviser:

1. $$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

2. $$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Beviserne beskrives ved hjælp af sandhedstabeller.

1.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Idet højre side af de to sandhedstabeller er ens, må

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

2.

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

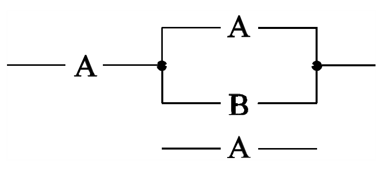
Idet højre side af de to sandhedstabeller er ens, må

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Eksempler med flere varianter

Ud fra de foran nævnte regneregler kan man reducere kredsløb og logiske udtryk. Vi skal se på et par eksempler:

Eksempel



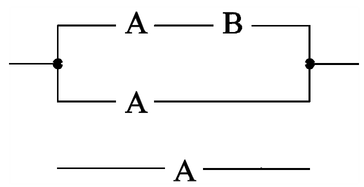
Dette kredsløb har følgende logiske funktion:

$$A \cdot (A + B) = A \cdot A + A \cdot B = A + A \cdot B$$

$$A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = \underline{\underline{A}}$$

hvilket vil sige, at kredsløbet kan reduceres til en kontakt = A.

Eksempel

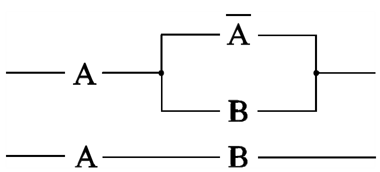


Dette kredsløb har følgende logiske funktion:

$$(A \cdot B) + A = A \cdot (B + 1)$$

$$A \cdot 1 = \underline{\underline{A}}$$

Eksempel

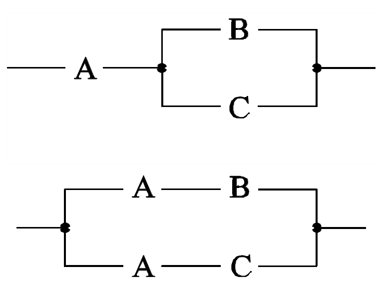


Dette kredsløb har følgende logiske funktion:

$$A \cdot (\overline{A} + B) = A\overline{A} + AB$$

$$0 + A \cdot B = \underline{\underline{A \cdot B}}$$

Eksempel



Dette kredsløb har følgende logiske funktion:

$$A\ (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Sandhedstabeller

Der findes forskellige matematiske hjælpemidler, hvoraf et af de mest virksomme er den såkaldte sandhedstabel. Udtrykket stammer fra logistikken (regnekunst), hvor man ved hjælp af sådanne sandhedstabeller afslører, om et logisk udsagn (logisk slutning) er sandt eller falsk. Ved at kunne tabellægge sådanne udsagn får man mulighed for at træffe "beslutninger", deraf også navnet beslutningstabeller.

Sandhedstabeller anvendes inden for logikken for at opnå en større overskuelighed for en operation eller et færdigt kredsløb. Sandhedstabellen opbygges med en søjle for hver af funktionens variable størrelser samt for det dertil hørende udgangssignal.

Antal rækker er lig 2^n, hvor n er antallet af variable størrelser.

Eksempel

P	T	B	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Som eksempel kan opstilles betingelserne for tobaksrygning uden fare:

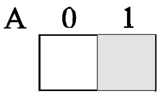
$$Z = P \cdot T \cdot \overline{B}$$

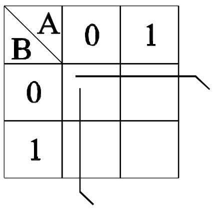
hvor Z = tilladelse til at ryge, P = pibe, T = tobak og B = benzin, altså eksplosionsfare.

Ligningen består af 3 variable, derfor bliver antallet af rækker $2^3 = 8$.

Det ses af sandhedstabellen, at kun kombinationen for P, T, B er lig med 1, 1, 0 giver et udgangssignal på Z = 1, mens alle øvrige 7 kombinationer af P T B giver Z = 0. I mange datablade for integrerede digitalkredse anvendes sandhedstabeller til beskrivelse af kredsens funktion.

Karnaugh-diagram





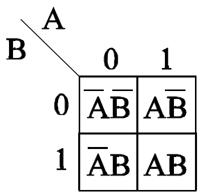
Til forenkling af en logisk funktion, forinden man realiserer funktionen med fx elektroniske komponenter, anvender man Karnaugh-diagrammer.

Det mindste Karnaugh-diagram, bestående af to celler, er, som det viste diagram for A. Diagrammet viser ved skraveringen, at den logiske funktion er lig A. Var skraveringen i "0" feltet ville den logiske funktion være:

$$\overline{A}$$

Man vil dog ikke arbejde med så simpelt et diagram.

Et normalt Karnaugh-diagram vil indeholde søjler og rækker. I det viste eksempel med 4 celler angiver søjlerne værdien af A, mens rækkerne angiver værdien af B. Betegnelsen af den enkelte celle er vist i dette Karnaugh-diagram. Normalt betegnes cellen med et 1-tal, såfremt den logiske funktion indeholder cellens værdi, ellers med et nul eller blank.



To tilstødende celler er naboceller, og man må opfatte Karnaugh-diagrammet som en kubus med såvel sammenbundne rækker som søjler. Med 3 variable bliver diagrammet en terning, hvor hver celle repræsenterer et hjørne af terningen.

C \ AB	00	01	11	10
0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
1	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	ABC	$A\bar{B}C$

Såfremt en logisk funktion indeholder flere varianter, udvides Karnaugh-diagrammet, som vist for 3 og 4 varianter.

Betegnelserne for søjlerne står for henholdsvis A og B med henholdsvis første og andet ciffer. Tilsvarende for rækkerne for C og CD i de to eksempler.

Mellem hver celle i Karnaugh-diagrammet er underforstået et "eller" tegn (+).

I praksis anbringes et 1-tal i cellen i stedet for kombinationen.

CD \ AB	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
01	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$AB\bar{C}D$	$A\bar{B}\bar{C}D$
11	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}BCD$	$ABCD$	$A\bar{B}CD$
10	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$ABC\bar{D}$	$A\bar{B}C\bar{D}$

C \ BA	00	01	11	10
0		1	1	
1				

Det her viste Karnaugh-diagram har funktionen

$$\bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C}$$

Den anvendte talkode kaldes Graykoden, og den anvendes, fordi den i modsætning til den binære talkode kun ændrer et ciffer fra et tal til det næste. Dette svarer til kravene for en logisk styring, hvor der kun må kræves et (kontakt) skift ad gangen.

Reduktionen af en logisk funktion sker ved at indskrive funktionen i et Karnaugh-diagram, hvorefter man indrammer så mange naboceller som muligt, dog således, at antallet udgør:

1, 2, 4, 8, 16.....celler.

Disse indramninger kan reduceres og nedskrives.

Eksempel

B \ A	0	1
0	1	
1	1	

Den logiske funktion

$$Z = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B$$

reduceres ved hjælp af Booles algebra:

$$Z = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B$$

$$Z = \overline{A}\,(\overline{B} + B) = \underline{\underline{\overline{A}}}$$

hvilket ses af diagrammet, hvor B er henholdsvis 0 og 1, hvilket ophæver hinanden, mens A inden for indramningen vedbliver at være 0.

Eksempel

Det vil sige, at reduceringen i praksis sker ved at undersøge hvilke variabler, der skifter værdi inden for indramningen, og derefter lade disse udgå. Ved flere indramninger i samme diagram anbringes et + mellem hvert led (indramning).

Indramningen, som er vist på venstre diagram, er korrekt, da der er tale om naboceller, som vist i højre diagram, hvor rækkefølgen i talkoden er flyttet.

$$Z = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C = \underline{\underline{\overline{B}C}}$$

Z =

C \ AB	00	01	11	10
0				
1	1			1

Z =

C \ AB	01	11	10	00
0				
1			1	1

Eksempel

$$Z = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$$

kaldes standardsummen.

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	

Cellerne med 1-tal angiver standardsumled. Indramning af 1-tallene giver minimumsummen.

$$Z = AB + \overline{A}\overline{B}C$$

AB er funktionen indenfor indramningen, idet C skifter værdi og derfor udgår. ABC er funktionen udenfor indramningen og kan ikke reduceres.

Eksempel

Udtrykket herunder reduceres ved hjælp af et Karnaugh-diagram.

CD \ AB	00	01	11	10
00		(a 1	(c 1	
01	1(b	1(b	1(b	1(b
11				
10		1 (d	1 (c	

$$Z = \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{C}D + AB\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D}$$

Cellen mærket (a angiver standardsumledet $\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$

Cellerne mærket (b angiver funktionen $\overline{C}D$

Cellerne mærket (c angiver funktionen $AB\overline{D}$

Cellen mærket (d angiver standardsumledet $\overline{A}BC\overline{D}$

$$Z = B\overline{D} + \overline{C}D$$

Eksempel

Det reducerede udtryk for Z1 og Z2 findes ved hjælp af Karnaugh-diagrammer samt realiseres med kontakter.

Z1 =

CD \ AB	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11			1	
10			1	

$$Z1 = AB + \overline{A}B\overline{C}$$

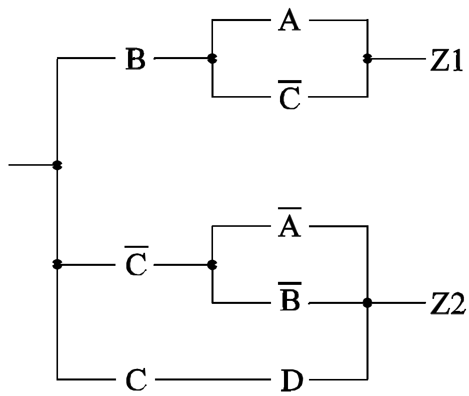
$$Z1 = B\overline{C} + AB = B(A + \overline{C})$$

$$Z2 = CD + \overline{ACD} + \overline{A}D + \overline{BC}$$

$$Z2 = \overline{AC} + \overline{BC} + CD = \overline{C}\,(\overline{A} + \overline{B}) + CD$$

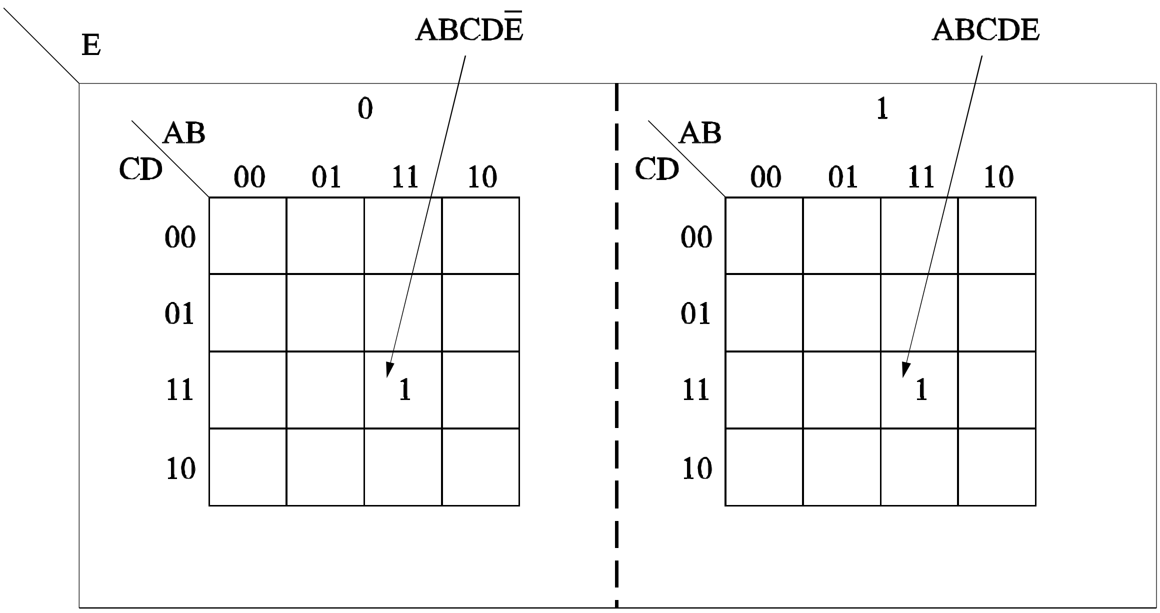
Z2 =

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11	1	1	1	1
10				



Fem varianter

Ved et Karnaugh-diagram for 5 varianter kan anvendes 2 diagrammer.



Ved indramning af Karnaugh-diagrammer med fem eller flere varianter findes naboskabet ved to 1-taller, der findes lige langt fra symmetriaksen. Der er symmetriakse såvel for rækker som for søjler.